第 2 节 双曲线的焦点三角形相关问题（★★★）

内容提要

双曲线的焦点三角形问题常用双曲线的定义求解，但除定义外，可能还需结合图形（如等腰、等边、直角三角形，矩形，平行四边形等）的几何性质才能求解问题，因此本节将归纳高考中双曲线常见的图形和几何条件的处理思路.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形中的特殊图形

【例 1】已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线 C 上，且 $PF_1\perp PF_2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_____.

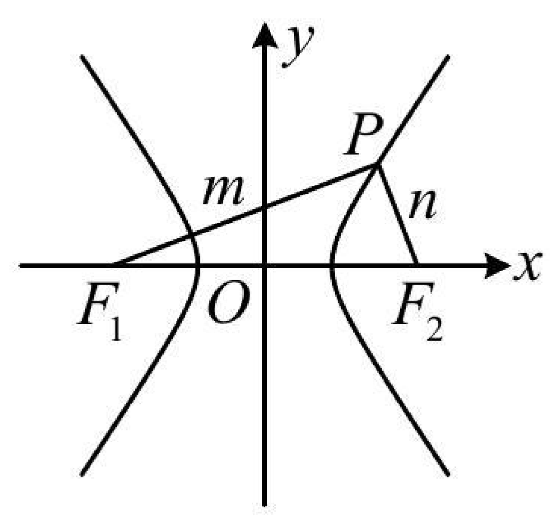
解析： 涉及焦点三角形，考虑用双曲线的定义，如图，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $|m-n|=2a$ ①，

上面得到的是长度关系，故用勾股定理翻译垂直，因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4(a^2+4)$ ②，

对比①和②发现，可通过配方求得 mn，面积就有了，由②知 $m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4a^2+16$ ③，

将式①代入式③可得 $4a^2+2mn=4a^2+16$，所以 $mn=8$，故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn=4$.

答案： 4



【反思】解析几何小题中对直角的常见翻译方法有：①勾股定理；②斜率之积为 -1；③向量数量积等于 0；④斜边上的中线等于斜边的一半等. 选择合适的方法前应先预判计算量.

【变式】设 $F(c,0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过原点 O 的直线与双曲线交于 A，B 两点，且 $AF\perp BF$，且 ΔABF 的周长为 $4a+2c$，则该双曲线的离心率为（　　）

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）$\frac{5}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{10}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{10}}{2}$

解析： 先分析图形，在双曲线中给出右焦点，一定要关注左焦点，

如图，记左焦点为 F_1，由对称性，AB 中点为 O，

又 FF_1 的中点也是 O，所以四边形 AF_1BF 是平行四边形，结合 $AF\perp BF$ 知四边形 AF_1BF 是矩形，

此时可将条件转移到 ΔAFF_1 中来，结合双曲线的定义处理，

设 $|AF_1|=m$，$|AF|=n$，则 $|BF|=m$，由四边形 AF_1BF 为矩形知 $|AB|=|FF_1|=2c$，

由题意，ΔABF 的周长 $L=|AB|+|BF|+|AF|=2c+m+n=4a+2c$，所以 $m+n=4a$ ①，

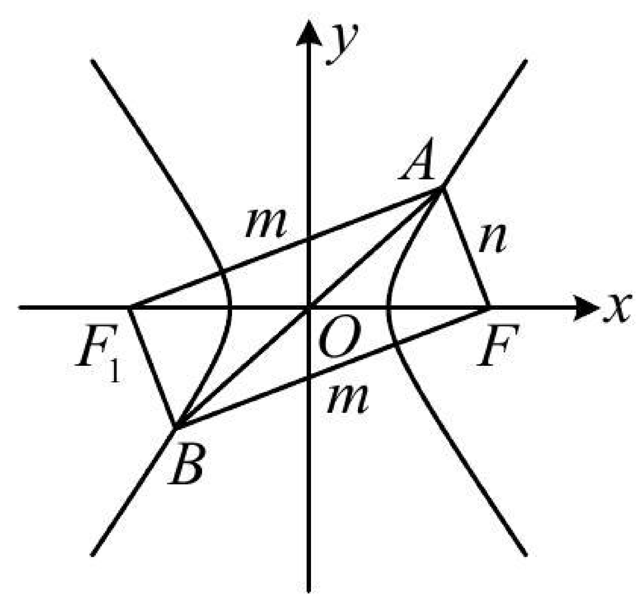
由双曲线定义，$|m-n|=2a$ ②，又 $AF_1\perp AF$，所以 $m^2+n^2=4c^2$ ③，

要求离心率，应消去 m 和 n，建立 a 和 c 的关系式，

将①和②平方相加可得 $(m+n)^2+(m-n)^2=16a^2+4a^2$，整理得：$m^2+n^2=10a^2$，

代入③可得 $10a^2=4c^2$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

答案：D



【反思】似曾相识吧？没错，椭圆也是类似的处理方法，再一次说明了两者解题的共性.

类型Ⅱ：定义与中点相关

【例 2】已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线 l 交双曲线 C 的右支于点 P，以双曲线 C 的实轴为直径的圆与 l 相切，切点为 H，若 $|F_1P|=2|F_1H|$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$\sqrt{13}$

解析：如图，因为 $|F_1P|=2|F_1H|$，所以 H 为 F_1P 的中点，涉及中点，可结合图形看看有没有中位线，

又原点 O 为 F_1F_2 的中点，所以 $|PF_2|=2|OH|=2a$，且 $PF_2\,//\,OH$，

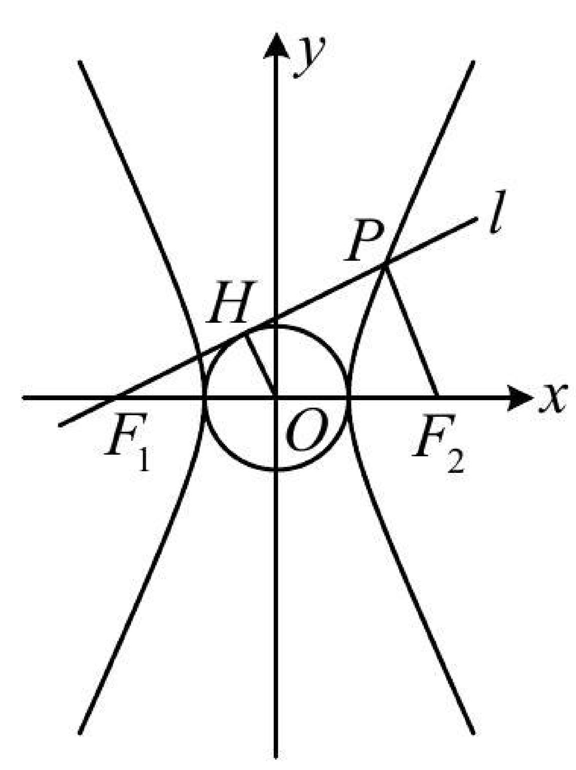
求出了 $|PF_2|$，又可用定义求 $|PF_1|$，因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=|PF_2|+2a=4a$，

因为 l 是圆的切线，所以 $OH\perp PF_1$，结合 $PF_2\,//\,OH$ 可得 $PF_2\perp PF_1$，

于是可在 ΔPF_1F_2 中用勾股定理建立方程求离心率，

所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，从而 $16a^2+4a^2=4c^2$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=5$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$.

答案：B



【反思】当出现中点时，可往中位线方向思考，而原点 O 是 F_1F_2 的中点，常作为构造中位线的隐藏条件.

【变式】设双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左焦点为$F$，$P$为双曲线右支上的一点，且$PF$与圆$x^2+y^2=9$相切于点$N$，$M$为线段$PF$的中点，$O$为原点，则$|MN|-|MO|=$_____.

解析：涉及双曲线的左焦点F，我们把右焦点F'也取出来，条件中有中点，想到构造中位线，

如图，M为PF的中点，O为FF'的中点，所以$|MO|=\frac{1}{2}|PF'|$ ①，

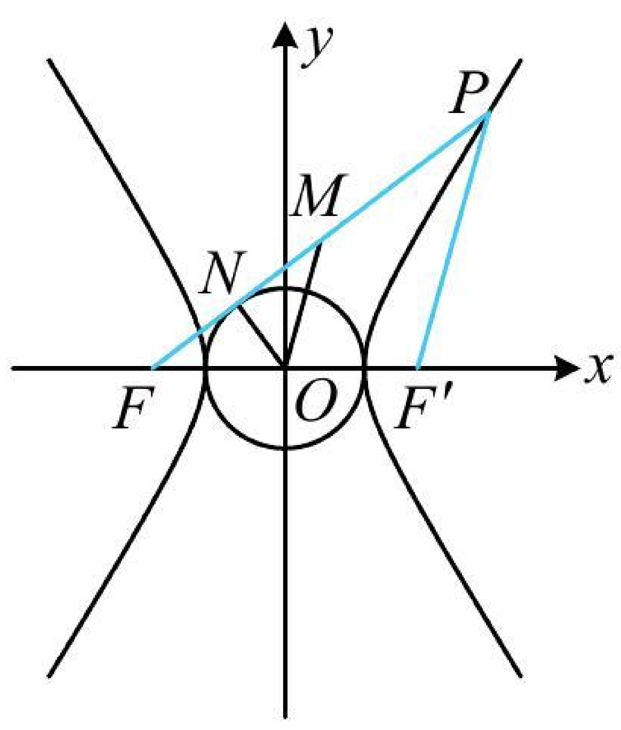
再来看$|MN|$，可想办法转化到$|PF|$上，结合双曲线定义来算$|MN|-|MO|$，

$|MN|=|MF|-|FN|=\frac{1}{2}|PF|-|FN|$ ②，因为PF是圆的切线，所以$ON\perp PF$，

又$|ON|=3$，$|OF|=c=\sqrt{9+16}=5$，所以$|FN|=\sqrt{|OF|^2-|ON|^2}=4$，代入②得：$|MN|=\frac{1}{2}|PF|-4$ ③，

由①③可得：$|MN|-|MO|=\frac{1}{2}|PF|-4-\frac{1}{2}|PF'|=\frac{1}{2}(|PF|-|PF'|)-4=\frac{1}{2}\times 6-4=-1$.

答案：-1



类型III：定义与解三角形相关

【例3】(2021•全国甲卷)已知F_1，F_2是双曲线C的两个焦点，P为C上一点，且$\angle F_1PF_2=60^\circ$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则C的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）$\sqrt{13}$

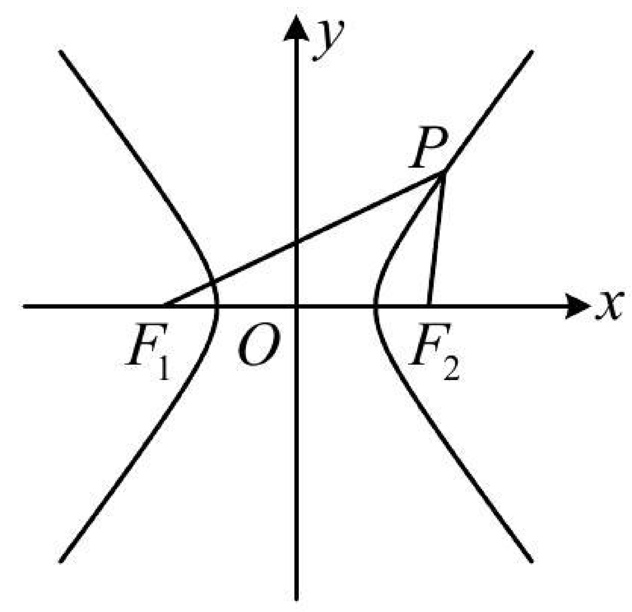
解析：涉及$|PF_1|$和$|PF_2|$，考虑双曲线定义，由题意，$\begin{cases}|PF_1|=3|PF_2|\\|PF_1|-|PF_2|=2a\end{cases}$，所以$\begin{cases}|PF_1|=3a\\|PF_2|=a\end{cases}$，

还剩$\angle F_1PF_2=60^\circ$这个条件没用，可在ΔPF_1F_2中由余弦定理建立方程求离心率，

由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以$4c^2=9a^2+a^2-2\times 3a\times a\times\cos 60^\circ$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$，故$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

答案：A



【变式 1】已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线$l$交双曲线的右支于$A$，$B$两点，且$|AB|=|AF_1|$，$\cos\angle AF_1B=\dfrac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

解析：如图，涉及双曲线上的点和两个焦点，考虑定义，由图可知，$\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2a & ①\\ |BF_1|-|BF_2|=2a & ②\end{cases}$，

又$|AB|=|AF_1|$，代入①可得$|AB|-|AF_2|=|BF_2|=2a$，代入②可得$|BF_1|-2a=2a$，所以$|BF_1|=4a$，

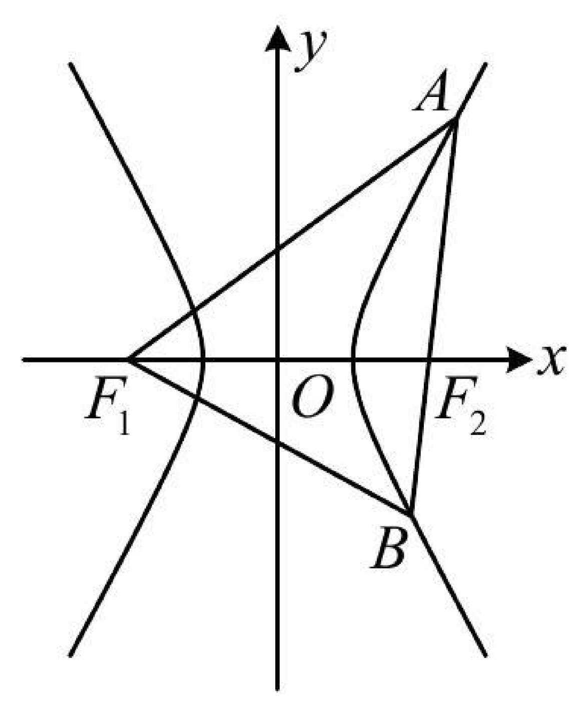
对于$\cos\angle AF_1B=\dfrac{1}{4}$这个条件，我们能想到用余弦定理建立方程求离心率，但若在ΔAF_1B中用，它的三边没有完全求出来，而ΔBF_1F_2三边均已知了，所以转化到ΔBF_1F_2中来用，

因为$|AB|=|AF_1|$，所以$\angle F_1BF_2=\angle AF_1B$，故$\cos\angle F_1BF_2=\cos\angle AF_1B=\dfrac{1}{4}$，

由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle F_1BF_2$，即$4c^2=16a^2+4a^2-2\times4a\times2a\times\dfrac{1}{4}$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=4$，所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=2$.

答案：C



【反思】从上面两道题可以看出，焦点三角形中的角度（非直角）类条件，常用余弦定理翻译成a，b，c的方程，求离心率.

【变式 2】（2023·新高考Ⅰ卷）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$A$在$C$上，点$B$在$y$轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则$C$的离心率为_____.

解析：如图，条件中有$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，不妨设一段长度，看能否表示其余线段的长，

设$|AF_2|=2m$，因为$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，所以$|BF_2|=3m$，故$|AB|=|AF_2|+|BF_2|=5m$，

由对称性，$|BF_1|=|BF_2|=3m$，又$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以$|AF_1|=\sqrt{|AB|^2-|BF_1|^2}=4m$，

$|AF_1|$和$|AF_2|$都有了，结合双曲线的定义可计算ΔABF_1的各边，则可用“双余弦法”建立方程，

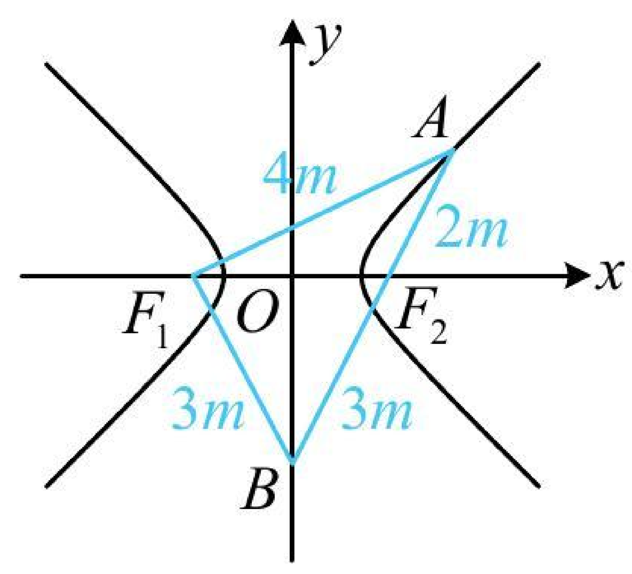
由图可知A在双曲线C的右支上，所以$|AF_1|-|AF_2|=2m=2a$，从而$m=a$，故$|BF_1|=|BF_2|=3a$，

又$|F_1F_2|=2c$，所以在ΔBF_1F_2中，由余弦定理推论，$\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}$

$=\dfrac{9a^2+9a^2-4c^2}{2\times3a\times3a}=\dfrac{9a^2-2c^2}{9a^2}$，在$\Delta ABF_1$中，$\cos\angle ABF_1=\dfrac{|BF_1|}{|AB|}=\dfrac{3m}{5m}=\dfrac{3}{5}$，

因为$\angle ABF_1=\angle F_1BF_2$，所以$\dfrac{9a^2-2c^2}{9a^2}=\dfrac{3}{5}$，故双曲线$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

答案：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

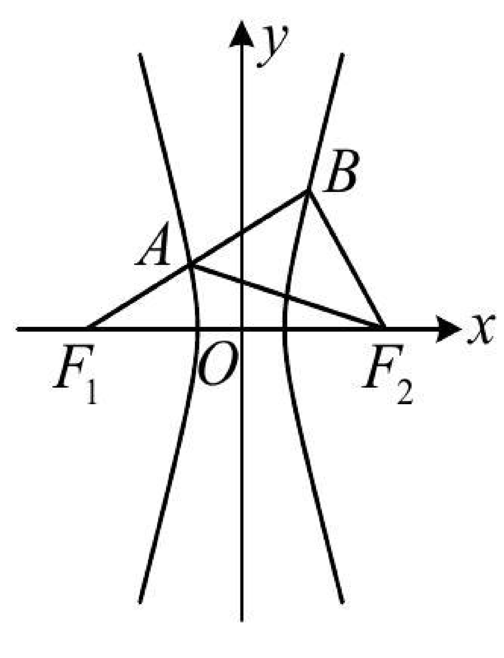


【反思】在双曲线离心率问题中，若给出两条线段的比例关系，则可设其中一条线段的长，并尝试将图形中的其它线段也用设的变量来表示，再结合双曲线的定义把它们转换成a，b，c，建立方程求离心率.

类型Ⅳ：定义与几何性质综合

【例4】如图，点F_1，F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，双曲线$C$的右支上存在一点$B$满足$BF_1\perp BF_2$，$BF_1$与双曲线$C$的左支的交点平分线段$BF_1$，则双曲线$C$的渐近线斜率为（　　）

（A）±3　（B）$\pm2\sqrt{3}$　（C）$\pm\sqrt{13}$　（D）$\pm\sqrt{15}$



解析：焦点三角形中翻译垂直关系，可考虑结合定义算有关线段的长，用勾股定理建立方程，

设$|AF_1|=m$，则$|AB|=m$，$|BF_1|=2m$，由双曲线定义，$\begin{cases}|AF_2|-|AF_1|=2a\\|BF_1|-|BF_2|=2a\end{cases}$，

所以$|AF_2|=2a+m$，$|BF_2|=2m-2a$，

因为引入了变量 m，所以求离心率需要建立两个方程，可到ΔABF_2和ΔBF_1F_2中分别用勾股定理，

在ΔABF_2中，$|AB|^2+|BF_2|^2=|AF_2|^2$，所以$m^2+(2m-2a)^2=(2a+m)^2$，整理得：$m=3a$ ①，

在ΔBF_1F_2中，$|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以$4m^2+(2m-2a)^2=4c^2$，将①代入整理得：$13a^2=c^2$，

所以$13a^2=a^2+b^2$，从而$\dfrac{b}{a}=2\sqrt{3}$，故渐近线斜率为$\pm 2\sqrt{3}$.

答案：B

【例 5】点$F(c,0)$为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，$P$ 为双曲线左支上一点，线段 PF 与圆 $M:(x-\dfrac{c}{3})^2+y^2=\dfrac{c^2}{9}$相切于点 Q，若$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QF}$，则双曲线的离心率为_____.

解法 1：先分析图形的几何特征，双曲线中只给了右焦点，往往也需要关注左焦点，

如图，记双曲线的左焦点为F_1，因为$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QF}$，所以$\dfrac{|QF|}{|PF|}=\dfrac{1}{3}$，

有了点 Q 在 PF 上的位置，我们也来看看 M 在 FF_1 上的位置，

由题意，圆 M 过原点，所以$|MF|=|OF|-|OM|=c-\dfrac{c}{3}=\dfrac{2c}{3}=\dfrac{1}{3}|FF_1|$，从而$\dfrac{|MF|}{|FF_1|}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{|QF|}{|PF|}$，

故$MQ/\!/PF_1$，且$|PF_1|=3|QM|=3\times\dfrac{c}{3}=c$，又 PF 是圆 M 的切线，所以$MQ\perp PF$，故$PF_1\perp PF$，

接下来可结合双曲线定义，把$|PF|$求出来，在ΔPFF_1中用勾股定理建立方程求离心率，

因为$|PF|-|PF_1|=2a$，所以$|PF|=|PF_1|+2a=c+2a$，

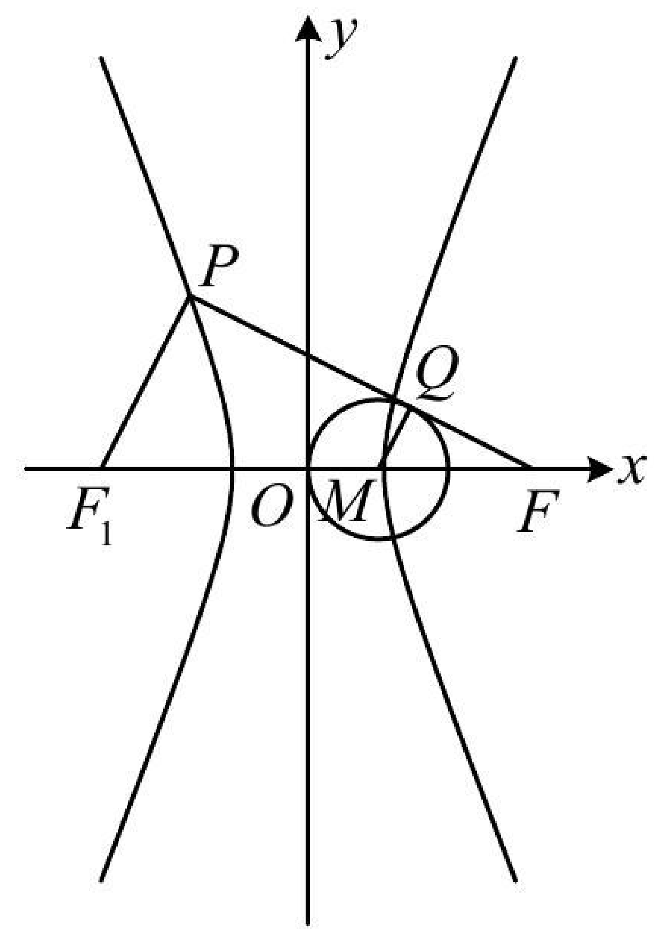
因为$PF_1\perp PF$，所以$|PF_1|^2+|PF|^2=|FF_1|^2$，即$c^2+(c+2a)^2=4c^2$，整理得：$c^2-2ac-2a^2=0$，

两端同除以a^2可得$e^2-2e-2=0$，解得：$e=1\pm\sqrt{3}$，又$e>1$，所以$e=1+\sqrt{3}$.

解法 2：按解法 1 得到$|PF_1|=c$和$PF_1\perp PF$后，也可用勾股定理求$|PF|$，由ΔPFF_1的三边算离心率，

$|PF|=\sqrt{|FF_1|^2-|PF_1|^2}=\sqrt{3}c$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{\big||PF|-|PF_1|\big|}=\dfrac{2c}{|\sqrt{3}c-c|}=1+\sqrt{3}$.

答案：$1+\sqrt{3}$



【反思】①解析几何中遇到线段比例的条件，构造相似比是一个值得考虑的方向；②焦点三角形PF_1F_2条件下求双曲线的离心率，若能分析三边比值关系，则可代公式$e=\dfrac{|F_1F_2|}{\big||PF_1|-|PF_2|\big|}$来算.

强化训练

1．（★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$右支上一点，且$|PF_2|=|F_1F_2|$，则$\Delta PF_1F_2$的面积等于（　　）

（A）24　（B）36　（C）48　（D）96

2．（2020・新课标III卷・★★）设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\sqrt{5}$，$P$是$C$上一点，$F_1P\perp F_2P$，若$\Delta PF_1F_2$的面积为4，则$a=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）8

3．（2022・江西九江三模・★★）双曲线$\dfrac{x^2}{t}-\dfrac{y^2}{1-t}=1(0<t<1)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为圆$x^2+y^2=1$与该双曲线的一个公共点，则$\Delta PF_1F_2$的面积为（　　）

（A）$1-t$　（B）t　（C）$2t-1$　（D）1

4．（2022・广西南宁模拟・★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，直线$y=kx(k\neq 0)$与双曲线$C$交于$A$，$B$两点，若$\angle AFB=90^\circ$，且$\Delta OAF$的面积为$4a^2$，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　（B）$\dfrac{\sqrt{26}}{5}$　（C）2　（D）3

5.（2012•大纲卷•★★）已知F_1，F_2为双曲线$C:x^2-y^2=2$的左、右焦点，点P在C上，$|PF_1|=2|PF_2|$，则$\cos\angle F_1PF_2=$（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{3}{5}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）$\frac{4}{5}$

6.（2023 • 河南郑州一模 • ★★★）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$右支上的一点，且$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2a^2$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

（A）2　（B）4　（C）6　（D）9

7.（2022 • 河南模拟 • ★★★）已知F_1，F_2分别是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_1$的直线与双曲线$C$的左、右两支分别交于$A$，$B$两点，若$\Delta ABF_2$是等边三角形，则$C$的离心率是_____.

8.（2022 • 河南月考改 • ★★★★）已知F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$O$为原点，双曲线上的点$P$满足$|OP|=b$，且$|PF_2|=3|PF_1|$，则该双曲线的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（C）2　（D）$\sqrt{3}$

9．（2022•湖南长沙模拟•★★★）已知F_1，F_2分别是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_2$的直线与双曲线的右支相交于$P$，$Q$两点，若$PQ\perp PF_1$，且$|PQ|=|PF_1|$，则$C$的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5-2\sqrt{2}}$　　（C）$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$　　（D）$1+2\sqrt{2}$

10．（★★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$A$，$B$分别在其左、右两支上，$\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{F_1A}$，$T$为线段$AB$的中点，且$F_1T\perp F_2T$，则双曲线的离心率为_____.

11．（2022•云南玉溪模拟•★★★★）已知双曲线E的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过F_1的直线l与E的左支交于P，Q两点，点P在以F_1F_2为直径的圆上，$|PQ|:|PF_2|=3:4$，则E的方程为（　　）

（A）$2x^2-2y^2=1$　　（B）$\dfrac{17x^2}{9}-\dfrac{17y^2}{8}=1$　　（C）$3x^2-\dfrac{3y^2}{2}=1$　　（D）$4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$